Soal dan Solusi
23rd Undip's Mathematics Competition
Final Round

Wildan Bagus Wicaksono

Updated 16 Pebruari 2022

§1 Soal

Problem 1. Diberikan lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di titik X dan Y. Titik Z berada pada garis singgung lingkaran Γ_1 yang melewati X sedemikian sehingga $\angle XYZ = 90°$. Titik A dan B terletak pada Γ_2 sedemikian sehingga A, B, Z terletak pada satu garis. Garis XA memotong kembali Γ_1 di titik K dan garis XB memotong Γ_1 di titik M. Jika L adalah titik yang terletak pada garis AB sedemikian sehingga $XL \perp AB$, buktikan bahwa K, L, M terletak pada satu garis.

Problem 2. Misalkan n adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$. Diberikan barisan n suku:

$$1, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad -\frac{1}{16}, \quad \cdots, \quad \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \tag{1}$$

Selanjutnya dari barisan ini, dilakukan suatu proses yaitu: dibentuk barisan baru dengan cara mengambil rata-rata aritmatika dari setiap dua suku berurutan, sehingga dari barisan (1) diperoleh barisan dengan $n-1$ suku:

$$\frac{3}{8}, \quad -\frac{5}{72}, \quad \frac{7}{288}, \quad \cdots, \quad \frac{n^2(-1)^n + (n-1)^2(-1)^{n+1}}{2n^2(n-1)^2}. \tag{2}$$

Lakukan proses yang sama pada barisan (2) untuk memperoleh barisan baru yang terdiri dari $n-2$ suku, dan ulangi proses ini terus menerus hingga akhirnya diperoleh sebuah bilangan x_n. Buktikan bahwa $x_n < \frac{2}{n}$.

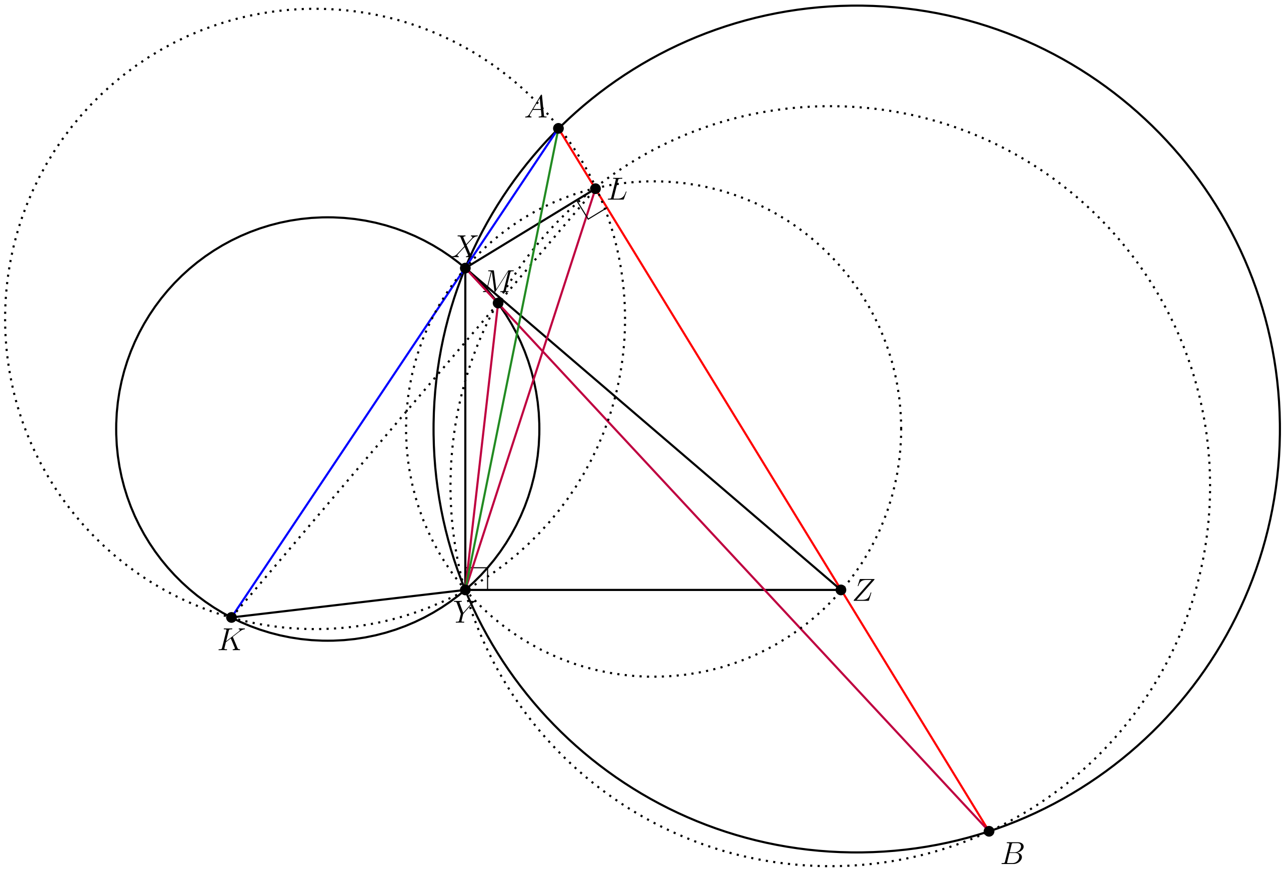
Problem 3. Untuk setiap bilangan riil positif a, b, dan c. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a+b-\sqrt{3ab}} + \sqrt{b+c-\sqrt{3bc}} \geq \sqrt{a+c-\sqrt{ac}}.$$

§2 Soal dan Solusi

Problem 1

Diberikan lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di titik X dan Y. Titik Z berada pada garis singgung lingkaran Γ_1 yang melewati X sedemikian sehingga $\angle XYZ = 90°$. Titik A dan B terletak pada Γ_2 sedemikian sehingga A, B, Z terletak pada satu garis. Garis XA memotong kembali Γ_1 di titik K dan garis XB memotong Γ_1 di titik M. Jika L adalah titik yang terletak pada garis AB sedemikian sehingga $XL \perp AB$, buktikan bahwa K, L, M terletak pada satu garis.



Akan kita gunakan sudut berarah. Perhatikan bahwa $\measuredangle ZLX = \measuredangle ZYX$, maka $XYZL$ segiempat siklis. Kita punya

$$\begin{aligned} \measuredangle BLY &= \measuredangle ZLY \\ &= \measuredangle ZXY && (ZLXY \text{ siklis}) \\ &= \measuredangle XKY && (ZX \text{ garis singgung } \Gamma_1) \\ &= \measuredangle BMY. \end{aligned}$$

Maka $BYML$ segiempat siklis.

Selain itu, tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\measuredangle ALY &= -\measuredangle YLZ \\
&= -\measuredangle YXZ && (ZYXL \text{ siklis}) \\
&= -\measuredangle YKX && (ZX \text{ garis singgung } \Gamma_1) \\
&= -\measuredangle YKA.
\end{aligned}$$

Maka $ALYK$ segiempat siklis. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\measuredangle LKY &= \measuredangle LAY && (ALYK \text{ siklis}) \\
&= \measuredangle ZAY \\
&= \measuredangle BAY \\
&= \measuredangle BXY && (BAXY \text{ siklis}) \\
&= \measuredangle MXY \\
&= \measuredangle MKY. && (XMYK \text{ siklis})
\end{aligned}$$

Maka diperoleh K, L, M segaris. ■

Remark. Tujuan penggunaan sudut berarah disini adlaah untuk mereduksi banyak kasus, mengingat banyak macam konfigurasi dari soal ini. Penentuan posisi titik A dan B bisa diabaikan karena hal ini tidak akan merubah soal. Ide yang saya peroleh untuk soal ini beberapa melalui cara mundur. Seperti, ide untuk mendapatkan $ALYK$ segiempat siklis berasal dari menganggap K, M, L kolinear. Sehingga akan diperoleh hal sebaliknya juga. AAAA sudah lama saya ga nemu ngerjakan soal geometri yang spam banyak lingkaran :')

Problem 2

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 2$. Diberikan barisan n suku:

$$1, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{9}, \quad -\frac{1}{16}, \quad \cdots, \quad \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}. \tag{1}$$

Selanjutnya dari barisan ini, dilakukan suatu proses yaitu: dibentuk barisan baru dengan cara mengambil rata-rata aritmatika dari setiap dua suku berurutan, sehingga dari barisan (1) diperoleh barisan dengan $n-1$ suku:

$$\frac{3}{8}, \quad -\frac{5}{72}, \quad \frac{7}{288}, \quad \cdots, \quad \frac{n^2(-1)^n + (n-1)^2(-1)^{n+1}}{2n^2(n-1)^2}. \tag{2}$$

Lakukan proses yang sama pada barisan (2) untuk memperoleh barisan baru yang terdiri dari $n-2$ suku, dan ulangi proses ini terus menerus hingga akhirnya diperoleh sebuah bilangan x_n. Buktikan bahwa $x_n < \frac{2}{n}$.

Untuk mempermudah, misalkan $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Claim — Untuk setiap $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, berlaku

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} a_i.$$

Bukti. Akan kita buktikan dengan induksi. Misalkan P_n menyatakan premis dari

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} a_i.$$

Untuk $n = 2$, maka

$$x_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \binom{1}{i-1} a_i = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

maka P_2 benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, maka P_k benar. Untuk $n = k+1$, sekarang kita tinjau bilangan-bilangan $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$. Setelah melakukan $k-1$ operasi, akan tersisa bilangan x_k dan δ, di mana δ adalah hasil operasi yang melibatkan a_{k+1} dan x_k adalah operasi yang tidak melibatkan a_{k+1}. Tinjau bahwa δ hanya melibatkan $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$. Hal ini seolah-olah mirip dengan ketika operasi yang melibatkan $a_1, a_2, \cdots, a_k$, yaitu x_k. Menurut hipotesis induksi, maka

$$\delta = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{i-1} a_{i+1}.$$

Maka

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{2}(x_k + \delta) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} a_i + \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} a_{i+1} \right) \end{aligned}$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{1}{2^k}\left[\binom{k-1}{0}a_1 + \binom{k-1}{k-1}a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k-1}{i-1}+\binom{k-1}{i}\right)a_{i+1}\right] \\
&= \frac{1}{2^k}\left[a_1 + a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}a_{i+1}\right] \\
&= \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a_i.
\end{aligned}$$

Maka P_{k+1} benar, sehingga menurut induksi klaim terbukti. $\square$

Maka dalam hal ini ekuivalen dengan membuktikan

$$x_n < \frac{2}{n} \iff \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}a_i < \frac{2^n}{n} \iff \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2} < \frac{2^n}{n}.$$

Misalkan

$$y_k = \sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Akan kita buktikan $y_n < \frac{2^n}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ dengan induksi. Misalkan Q_n menyatakan premis dari $y_n < \frac{2^n}{n}$. Untuk $n = 2$, maka

$$y_2 = \binom{1}{0}\frac{(-1)^2}{1^2} + \binom{1}{1}\frac{(-1)^3}{2^2} = \frac{3}{4} < \frac{2^2}{2},$$

maka Q_2 benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, maka Q_k benar. Untuk $n = k+1$,

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2} = y_k + \binom{k}{k}\frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} = y_k + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} < \frac{2^k}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2}.$$

Tinjau bahwa

$$\frac{2^{k+1}}{k+1} - \frac{2^k}{k} = 2^k\left(\frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = 2^k \cdot \frac{2k-k-1}{k(k+1)} = \frac{k-1}{k(k+1)}\cdot 2^k.$$

Tinjau bahwa

$$\frac{2^k}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} < \frac{2^{k+1}}{k+1} \iff \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} < \frac{k-1}{k(k+1)}\cdot 2^k \iff (-1)^{k+2} < \frac{k^2-1}{k}\cdot 2^k.$$

Misalkan

$$f(k) = \frac{k^2-1}{k}\cdot 2^k = \left(k - \frac{1}{k}\right)\cdot 2^k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Akan kita buktikan $f(k)$ fungsi naik tegas, yaitu

$$f(k) < f(k+1) \iff \left(k-\frac{1}{k}\right)\cdot 2^k < \left(k+1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot 2^{k+1} \iff k - \frac{1}{k} < 2k+2-\frac{2}{k+1}$$

yang ekuivalen pula dengan

$$\frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} < k+2 \iff \frac{k-1}{k(k+1)} < k+2 \iff k-1 < k(k+1)(k+2)$$

yang jelas benar untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Maka untuk setiap $k \geq 2$,

$$\frac{k^2-1}{k} \cdot 2^k = f(k) > f(2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 6 > (-1)^{k+2}.$$

Sehingga kita bisa simpulkan bahwa

$$y_{k+1} < \frac{2^k}{k} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)^2} < \frac{2^{k+1}}{k+1} \implies y_{k+1} < \frac{2^{k+1}}{k+1}.$$

Maka Q_{k+1} juga benar. Sehingga menurut induksi terbukti bahwa $y_n < \frac{2^n}{n}$, yang di mana kita telah membuktikan soal. ■

> **Remark.** Untuk menentukan x_n bisa melihat pola dari x_2, x_3, x_4, dan seterusnya. Solusi saya cukup panjang, mungkin pembaca memiliki solusi yang lebih elegan :) Untuk membuktikan $y_n < \frac{2^n}{n}$, saya terpikir dengan melihat bahwa $f(x) = \frac{2^x}{x}$ merupakan fungsi naik tegas. Kemudian dapat dilakukan hal yang serupa pada solusi diatas. Soal ini menjadi soal tervaforit bagi saya dari kedua soal lainnya.

Problem 3

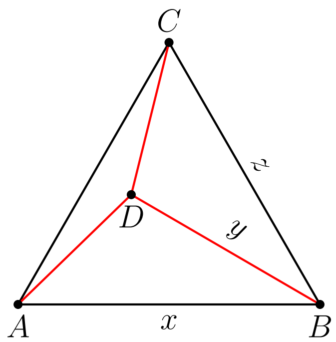
Untuk setiap bilangan riil positif a, b, dan c. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a+b-\sqrt{3ab}}+\sqrt{b+c-\sqrt{3bc}} \geq \sqrt{a+c-\sqrt{ac}}.$$

Misalkan $\sqrt{a}=x, \sqrt{b}=y$, dan $\sqrt{c}=z$ untuk suatu $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Ketaksamaan ekuivalen dengan

$$\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+z^2-yz\sqrt{3}} \geq \sqrt{x^2+z^2-xz}.$$

Tinjau titik A, B, C, dan D pada bidang dua dimensi sedemikian sehingga $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$. Ambil panjang $AB = x, BD = y$, dan $BC = z$.



Dari aturan cosinus pada $\triangle ABD$,

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cos \angle ABD \\ AD &= \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama pada $\triangle BDC$ dan $\triangle ABC$,

$$CD = \sqrt{y^2+z^2-yz\sqrt{3}} \quad \text{dan} \quad AC = \sqrt{x^2+z^2-xz}.$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga $\triangle ADC$, maka

$$AD + DC \geq AC \iff \sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}+\sqrt{y^2+z^2-yz\sqrt{3}} \geq \sqrt{x^2+z^2-xz}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Kesamaan terjadi jika dan hanya jika A, D, dan C segaris. Misalkan panjang $AD = p$ dan panjang $CD = q$. Tinjau BD adalah garis bagi $\angle ABC$, maka berlaku $y^2 = xz - pq$. Karena $p + q = AC = \sqrt{x^2+z^2-xz}$ dan berdasarkan **Teorema Garis Bagi**, maka

$$p \cdot q = \frac{x}{x+z} AC \cdot \frac{z}{x+z} AC = \frac{xz\left(x^2+z^2-xz\right)}{(x+z)^2}.$$

Kita punya

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{xz - pq} \\
y &= \sqrt{xz\left(1 - \frac{x^2+z^2-xz}{(x+z)^2}\right)} \\
y &= \sqrt{xz \cdot \frac{x^2+z^2+2xz-(x^2+z^2-xz)}{(x+z)^2}} \\
y &= \frac{xz\sqrt{3}}{x+z} \\
\frac{1}{y} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right) \\
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.
\end{aligned}$$

Demikian kondisi kesamaan terjadi ketika (a, b, c) merupakan solusi dari $\sqrt{\frac{3}{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$. ■

> **Remark.** Ketika pertama kali melihat soal, saya: "AHH ruas kanan merusak kesimetrisannya :')".
> Awalnya saya mencoba mencari kasus kesamaan dari ketaksamaan ini, namun cukup sulit dan tidak berhasil menemukannya. Setidaknya, dengan menemukan kasus kesamaan, saya bisa mengira-ngira bagaimana konsep dan teorema ketaksamaan yang akan digunakan. Ternyata cara ini tidak berhasil. Dengan menggunakan permisalan, bentuk $x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}$ dirasa tidak asing dengan suatu bentuk, yaitu formula kosinus. Maka dari itu saya berpikir bisa menggunakan interpretasi geometri dan solve :D